TEMA

23

Funciones circulares e hiperbólicas y sus recíprocas. Situaciones reales en las que aparecen

MAD

Jesús Gómez Gómez

Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria

ÍNDICE SISTEMÁTICO

1. INTRODUCCIÓN

Las funciones circulares fueron introducidas por la vía *geométrica* a partir de la trigonometría plana. Los musulmanes ya disponían de grandes avances en este campo. Así pues, Al Habas (770?-870?) introduce la función trigonométrica de tangente y confecciona tablas de sen y tg, que luego perfeccionarían Abul-Wafa (940-998) y Al-Biruni (973-1048).

A comienzos del siglo XVI la trigonometría estaba aún vinculada a la astronomía. De hecho en la obra de Copérnico titulada *De revolutionibus orbium coelestium*, tres capítulos están dedicados a las funciones circulares. Dos de esos capítulos habían aparecido ya en 1542, año anterior al de la publicación de la obra de Copérnico, en un escrito de su editor Georg Joachim, llamado Rhaeticus, a quien se debe el estudio sistemático de las seis funciones circulares en 1551, apareciendo por primera vez en Europa definidas sobre la circunferencia fundamental. Fuera del seno y del coseno Rhaeticus no dio nombre especial a ninguna de las otras. Los nombres de tangente y secante aparecen en una obra de Thomas Fincke de 1583.

En el Barroco temprano se producen nuevas contribuciones. Así pues, los continuadores de Rhaeticus (Otto, Pitiscus, ...) construyeron tablas con precisión asombrosa de tales funciones.

La vinculación con otros problemas como la cuadratura del círculo y la aproximación del número π hace que el estudio de las funciones circulares cobre vigor, sobresaliendo la figura de Viète (1540-1603), quien, entre otras muchas aportaciones, ideó un método de biparticiones para obtener valores tabulados de las funciones circulares y empezó a desarrollar los teoremas fundamentales.

Más tarde, el desarrollo de los métodos infinitesimales permitió un enfoque nuevo basado en las series. Así por ejemplo, hay contribuciones diversas (Pascal, Fermat, Wallis, Newton, Leibniz, Bernouilli, etc.) motivadas por el polémico estudio de la cicloide, que originó la aparición de su *compañera*, la sinuoide. Un manejo eficaz de esta curva se debe a Roverbal en su método de los *indivisibles* para determinar el área de la cicloide y el volumen del cuerpo engendrado por su revolución.

Por su parte Huygens se ocupó del estudio de la catenaria, donde intervienen la funciones hiperbólicas, mientras que Gregory estudió las funciones circulares inversas.

Aunque las funciones hiperbólicas fueron introducidas en 1757 por Ricatti, Lambert les da en 1769 la misma importancia que a las trigonométricas y calcula una tabla para aquellas. Se ocupó del estudio de las funciones hiperbólicas en conexión con la teoría de las paralelas y demostró la irracionalidad de π partiendo del desarrollo en fracción continua de *tg x*.

Pero probablemente sea Euler, el matemático más relevante del siglo XVIII, el que más aportó al conocimiento de las funciones trascendentes. A él se debe la relación entre las funciones circulares e hiperbólicas con las exponenciales. En su obra *Introductio in analysin infinitorum* hace un tratamiento estrictamente analítico (y no geométrico) de las funciones trigonométricas. El seno de un ángulo, por ejemplo, ya no es un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o bien la suma de la serie $z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots$ para algún valor de z.

Cabe destacar por último al francés Fourier, que, en su estudio de las funciones analíticas, aportó con las llamadas **series trigonométricas** una extensión del concepto euleriano de función.

Podemos decir que las funciones que se van a estudiar en el presente tema han sido objeto de estudio a lo largo de la historia, en conexión tanto otras parcelas de la matemática, como la geometría o el álgebra, pero también motivado por la investigación en otros campos de la ciencia y de la técnica, como la astronomía, la mecánica o la electrónica.

2. FUNCIONES CIRCULARES

2.1. Ángulos orientados

Partiremos de la noción intuitiva de "*ángulo orientado*" (o "dirigido"), como par ordenado (s_1,s_2) de semirrectas con un origen común.

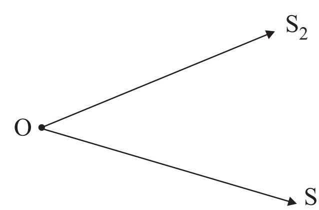
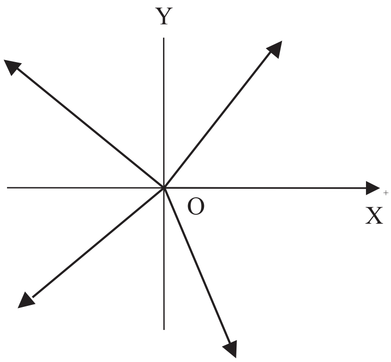


Figura 1.



Si tomamos en el plano un sistema de referencia OXY ortonormal (ejes rectangulares), podemos considerar como semirrecta *inicial* s_1 la mitad positiva del eje de abcisas (OX^+), y entonces el ángulo orientado vendrá dado por la semirrecta *terminal*, más concretamente por el ángulo *barrido* por ésta al girar con centro O. De esa manera puede considerarse un ángulo orientado como un ángulo de giro, se puede generalizar la noción de ángulo *admitiendo* ángulos superiores a una vuelta y se pueden establecer dos sentidos de giro (usualmente como positivo el contrario al de las agujas del reloj).

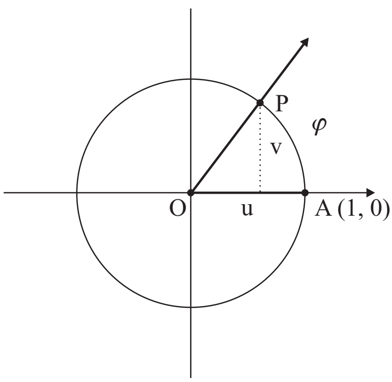
Figura 2.

2.2. Definición de **seno** *y* **coseno**

Tomemos ahora la circunferencia de centro O y radio unidad

$$C = \{(u, v) / u^2 + v^2 = 1\}$$

Está claro que toda semirrecta con origen en O determina un único punto P(u,v) de C. Ello significa que para cada ángulo orientado φ, situado sobre el sistema de referencia OXY de la forma establecida, obtendremos un punto P(u,v) cumpliendo $u^2 + v^2 = 1$. Entonces definiremos **coseno** y **seno** de φ como las coordenadas del punto P. O sea:



$\cos \varphi = u$
$\operatorname{sen} \varphi = v$

Figura 3.

Observación:

Sabido es que podríamos haber tomado una circunferencia de radio r cualquiera y las definiciones serían $\cos \varphi = \frac{u}{r}, \operatorname{sen} \varphi = \frac{v}{r}$. Es fácil probar la independencia de tales definiciones con respecto al radio elegido, con lo cual tomamos r = 1 (circunferencia *goniométrica*), sin restar generalidad.

Tratamos de que las definiciones dadas nos permitan *construir* dos funciones reales de variable real. Pero para ello es preciso que un ángulo orientado φ quede *identificado* mediante un número real x.

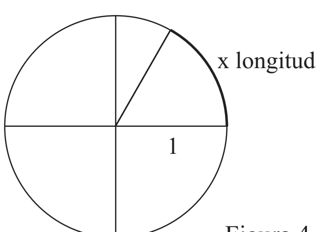


Figura 4.

En realidad no nos interesa tanto la perspectiva geométrica como la del análisis real, y en ese sentido hay otras formas de llegar a las funciones que pretendemos, si recurrir siquiera a la noción de ángulo. No obstante, la introducción del *radián* puede ser, al menos en primera aproximación, una manera de solventar la cuestión. En efecto, con la definición clásica lo que hacemos es asignar valor 1 al ángulo dirigido en sentido contrario al de las agujas del reloj y tal que la longitud del arco es 1, es decir, al ángulo central cuyo arco correspondiente tiene la misma longitud que el radio.

De esta manera el ángulo orientado φ definido por P se *identifica* con la longitud x del arco AP tomando como unidad el radio de la circunferencia, si para ir de A a P hay que seguir el sentido contrario de las agujas del reloj. Si para ir de A a P vamos en sentido de las agujas del reloj entonces identificaremos φ con el número –x. Decimos en cada caso que la medida de φ es x radianes o –x radianes.

Cuando recorremos la circunferencia completa partiendo desde A(1,0) en sentido positivo hasta volver a A de nuevo, el ángulo dirigido en que ambas semirrectas inicial y terminal son OA corresponde entonces a la longitud total de la circunferencia unidad, que es 2π.

De ese modo, si nos ceñimos a tan sólo la *primera vuelta* obtendremos una biyección entre los puntos del círculo unidad C y el intervalo de números reales $[0,2\pi]$

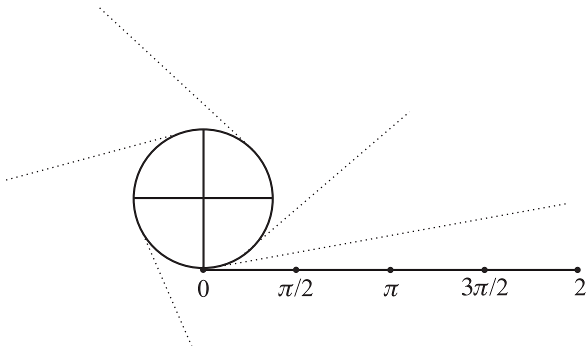
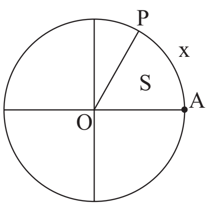


Figura 5.

Hay otra forma de interpretar la asignación de un número real a un ángulo orientado. Teniendo en cuenta la proporcionalidad directa entre el área de un sector del círculo unidad y el arco correspondiente, la razón de dicha proporcionalidad viene dada por



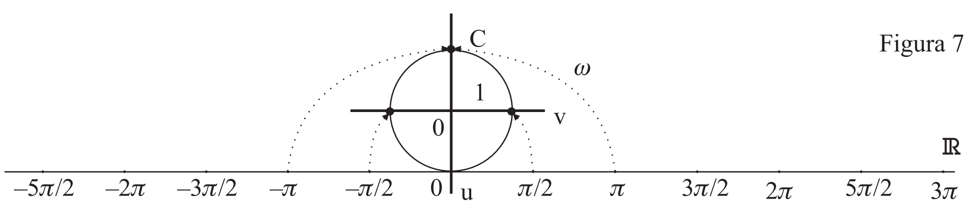
$$\frac{\text{área círculo}}{long.circunferencia} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Figura 6.

Para un sector de arco x, el área será $\frac{x}{2}$. Es decir, a un ángulo dirigido positivo de la primera vuelta, le asignamos como medida un número real x entre 0 y 2π, que viene a ser el doble del área del sector S correspondiente.

Supongamos ahora un ángulo generalizado superior a una vuelta. El arco contado a partir de A es ahora superior a 2π (y lo mismo ocurre con el doble del área del sector *barrido*). Es como si el *arco* se fuera *arrollando* sobre el círculo unidad. Resultaría, pues, que el ángulo de x radianes y el de $x + 2\pi$ radianes corresponderían al mismo punto P sobre el círculo unidad, y lo mismo ocurriría con el de $x + 4\pi$, $x + 6\pi$, ... radianes. Si vamos *arrollando* al revés, es decir, en sentido de las agujas del reloj, tendríamos que los ángulos de $x - 2\pi$, $x - 4\pi$, $x - 6\pi$, … radianes también corresponden al mismo punto P. Si llamamos $\omega: \mathbb{R} \to C$ a la *función de arrollamiento*, tendríamos que $\omega(x + 2\pi k) = \omega(x) = P(u,v)$ para todo $k \in Z$

Figura 7.



Nuestra definición dada de seno y coseno, se traduce ahora en:

Para todo $x \in (-\infty,+\infty)$ es:

$$\cos x = \text{abcisa de } \omega(x) = u$$

$$\text{sen } x = \text{ordenada de } \omega(x) = v$$

Como consecuencias:

1. $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$, $\operatorname{sen}(x + 2\pi k) = \operatorname{sen} x$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
2. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = u^2 + v^2 = 1$, pues $P(u,v)$ está sobre la circunferencia unidad.

2.3. Definición de las demás funciones circulares

A partir de sen x y cos x , definimos:

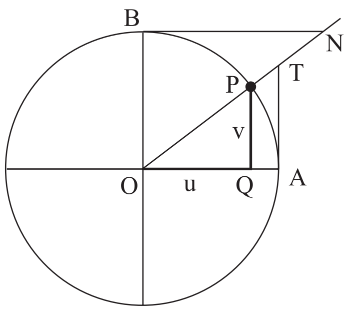
Tangente $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Cotangente $\quad \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

Secante $\quad \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Cosecante $\quad \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Puede darse un significado geométrico sobre el círculo unidad C a tales funciones, enlazando con la definición anterior de las funciones cos x y sen x, como las coordenadas (u,v) del punto $\omega(x) = P$. Si suponemos $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, la longitud del arco será menor que un cuarto de circunferencia y estaremos en el *primer cuadrante*. La semejanza de triángulos nos da:



OA = OB = OP = r = 1

Figura 8.

$$\operatorname{sen} x = v = \overline{PQ}$$

$$\cos x = u = \overline{OQ}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{v}{u} = \frac{\overline{TA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{TA}}{1} = \overline{TA}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{u}{v} = \frac{\overline{NB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{NB}}{1} = \overline{NB}$$

$$\sec x = \frac{1}{u} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OT}}{1} = \overline{OT}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{v} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ON}}{1} = \overline{ON}$$

En este caso, todos los valores son positivos por serlo u y v. Para los restantes cuadrantes se puede hacer una interpretación similar, pero hay que tener en cuenta los signos correspondientes. Así pues, para sen x, cos x y tgx , las *líneas trigonométricas* serían:

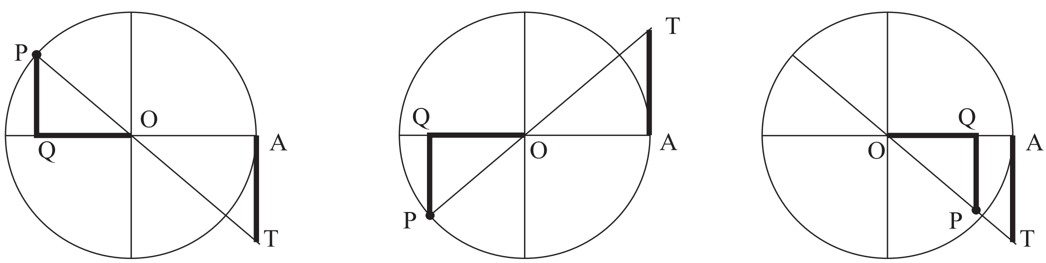


Figura 9.

2.4. Propiedades inmediatas

1. sen 0 = 0, $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$, sen π = 0, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -1$
2. cos 0 = 1, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, cos π = –1, $\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = 0$
3. La función seno es impar: sen (–x) = –sen x, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$
4. La función coseno es par: cos (–x) = cos x, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$
5. $\text{sen}\,(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos (x + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}\,x$
6. $\text{sen}\,(x + \pi) = -\text{sen}\,x$, $\cos (x + \pi) = -\cos x$
7. $\text{sen}\,(x + \frac{3\pi}{2}) = \cos x$, $\cos (x + \frac{3\pi}{2}) = -\text{sen}\,x$
8. $\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\cos (\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}\,x$
9. $\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x$, $\cos (\pi - x) = -\cos x$
10. $\text{sen}(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$, $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen}\,x$
11. $\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,x$, $\forall$ k $\in$ Z
12. $\cos (x + 2\pi) = \cos x$, $\forall$ k $\in$ Z
13. $\text{tg}\,(x + k\pi) = \text{tg}\,x$, $\forall$ k $\in$ Z
14. $\text{cotg}\,(x + k\pi) = \text{tg}\,x$, $\forall$ k $\in$ Z
15. $\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y + \cos x \cdot \text{sen}\,y$
16. $\cos (x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$
17. $\text{sen}\,(x - y) = \text{sen}\,x \cdot \cos y - \cos x \cdot \text{sen}\,y$
18. $\cos (x - y) = \cos x \cdot \cos y + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y$
19. $\text{sen}\,2x = 2\text{sen}\,x \cdot \cos x$
20. $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\,x$
21. $\cos^2 x + \text{sen}^2\,x = 1$
22. $1 + \text{tg}^2\,x = \sec^2 x$
23. $\text{cotg}^2\,x + 1 = \text{cosec}^2\,x$
24. $\text{sen}^2\,x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
25. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
26. $\text{sen}\,x + \text{sen}\,y = 2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
27. $\text{sen}\,x - \text{sen}\,y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

28. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

29. $\cos x - \cos y = -2\,\text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Las propiedades anteriores se pueden justificar *geométricamente*, en consonancia con nuestra introducción de las funciones circulares a partir de ángulos orientados sobre el círculo unidad. Otras construcciones más formales por la vía *analítica*, que no se basan tanto en la noción de ángulo, exigen otro tipo de demostraciones, como veremos adelante.

2.5. Periodicidad

Es esta una característica fundamental de las funciones circulares, que las hace sumamente importantes para el tratamiento de multitud de fenómenos (ondas, vibraciones, oscilaciones,...)

Dada una función f(x) definida en un dominio D, un "período" es todo número p que cumple:

a) $x \in D \Rightarrow x + p \in D$

b) $f(x + p) = f(x),\ \forall\, x \in D$

Si existe algún número con las condiciones anteriores a f(x) se le denomina "función periódica".

Se verifican:

- Todo múltiplo de un período es también un período, es decir: $f(x + kp) = f(x),\ \forall\, x \in D$.
- La diferencia de dos períodos es otro período.
- Si f(x) es una función periódica, no constante, sus períodos son los múltiplos del menor período positivo, y sólo ellos. Al menor período positivo le llamaremos T (período *primitivo*).

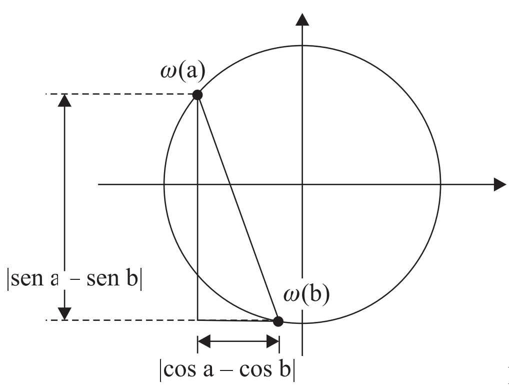
Las seis funciones circulares son periódicas. En el caso del seno, coseno, secante y cosecante el período primitivo es $T = 2\pi$.

En el caso de la tangente el período primitivo es $T = \pi$, ya que $\text{tg}\,(x+\pi) = \frac{\text{sen}\,(x+\pi)}{\cos\,(x+\pi)} = \frac{-\text{sen}\,x}{-\cos x} = \text{tg}\,x$, y análogamente para la cotangente.

2.6. Continuidad y derivabilidad de las funciones circulares

Se utilizará de nuevo aquí la notación inicial introducida en la sección 2.2. Así pues, el círculo unidad es $C = \{(u, v) / u^2 + v^2 = 1\}$ y $\omega(x)$ la función de arrollamiento de $\mathbb{R}$ en C, que a cada número real x asocia el punto P(cos x, sen x) de C, siendo x la longitud del arco desde A(1,0) al punto P.

Sea $I = [a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$ con amplitud suficientemente pequeña. Puesto que al arrollar I sobre C no se produce estiramiento, tendremos un arco de longitud $|a - b|$ entre $\omega(a)$ y $\omega(b)$.



$\omega(a) = (\cos a, \text{sen}\ a)$

$\omega(b) = (\cos b, \text{sen}\ b)$

Figura 10.

La longitud de la cuerda que une $\omega(a)$ y $\omega(b)$ es menor que el arco que la subtiende, y en consecuencia

$$\sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2} \leq |a - b|$$

Son obvias las inigualdades

$$(\cos a - \cos b)^2 \leq (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2$$

$$(\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2 \leq (\cos a - \cos b)^2 + (\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b)^2$$

que combinadas con la anterior nos llevan a

$$|\cos a - \cos b| \leq |a - b|$$

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leq |a - b|$$

Ahora podemos utilizar estos resultados para probar la continuidad de la funciones seno y coseno en cualquier punto x_0.

En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon$, tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces

$$|\cos x - \cos x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x - x_0| < \varepsilon$$

Resulta, pues, que:

Las funciones reales f(x) = cos x y g(x) = sen x son continuas en todo $\mathbb{R}$ (la continuidad es además uniforme).

Para las demás funciones circulares vale el teorema relativo a la continuidad de la función cociente de dos funciones continuas. Esto es, la función cociente es continua salvo en aquellos puntos donde la del denominador se anula. Así pues:

- Las funciones tg x y sec x son continuas en $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{(2k-1)\pi}{2}, k \in Z\right\}$
- Las funciones cotg x y cosec x son continuas en $\mathbb{R} - \{k\pi \,/\, k \in Z\}$

Veamos ahora la derivabilidad. La demostración clásica de que las funciones seno y coseno son derivables en todo $\mathbb{R}$ se basa en las fórmulas de adición (propiedades 15. y 16. de la sección 2.4.) y en el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$.

Para probar dicho límite, consideraremos $|h| < \dfrac{\pi}{2}$, pues nos va a interesar lo que ocurre para h pequeño. Si es $0 < h < \dfrac{\pi}{2}$, podemos recurrir a la figura y poner:

Área (Δ OAP) $\leq$ Área (Sector OAP) $\leq$ Área (Δ OAT)

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} h \leq \frac{1}{2} h \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} h$$

Dividiendo entre sen h: $1 \leq \dfrac{h}{\operatorname{sen} h} \leq \dfrac{1}{\cos h}$

Tomando inversos: $\cos h \leq \dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \leq 1 \qquad (*)$

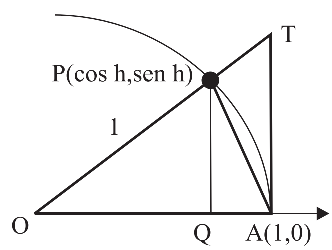


Figura 11.

Si fuese $-\dfrac{\pi}{2} < h < 0$ tomando $-h > 0$ tendríamos $\cos(-h) \leq \dfrac{\operatorname{sen}(-h)}{-h} \leq 1$, y como $\cos(-h) = \cos h$, $\operatorname{sen}(-h) = -\operatorname{sen} h$, queda de nuevo (*).

Ahora basta tomar límites en (*) y aplicar la regla del *sandwich*.

Además

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \frac{1}{\cos h + 1} \cdot \operatorname{sen} h$$

y al pasar al límite tendremos: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0.$

Entonces:

$$\mathrm{D}\operatorname{sen} x = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) + \operatorname{sen} x \left(\lim_{x \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) = \cos x$$

$$\mathrm{D}\cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \cos x \left(\lim_{x \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) = -\operatorname{sen} x$$

Las derivadas de las demás funciones circulares se obtienen aplicando las conocidas reglas de derivación.

2.7. Gráficas de las funciones circulares

La gráfica de una función periódica se da, por lo general, solamente en un período. Como la gráfica se repite a intervalos regulares de amplitud T, bastaría *deslizar* la porción dada en ambas direcciones siguiendo el eje OX, para obtener la gráfica completa.

Por otro lado, la interpretación geométrica de las funciones circulares en el intervalo $[0,2\pi]$, permite *construir* la gráfica en dicho intervalo de cada una viendo cómo varía la línea trigonométrica correspondiente (ver epígrafe 2.3.) al recorrer el círculo unidad una vuelta.

Acompañaremos dicha construcción con una síntesis de las propiedades más relevantes que se reflejan en la gráfica.

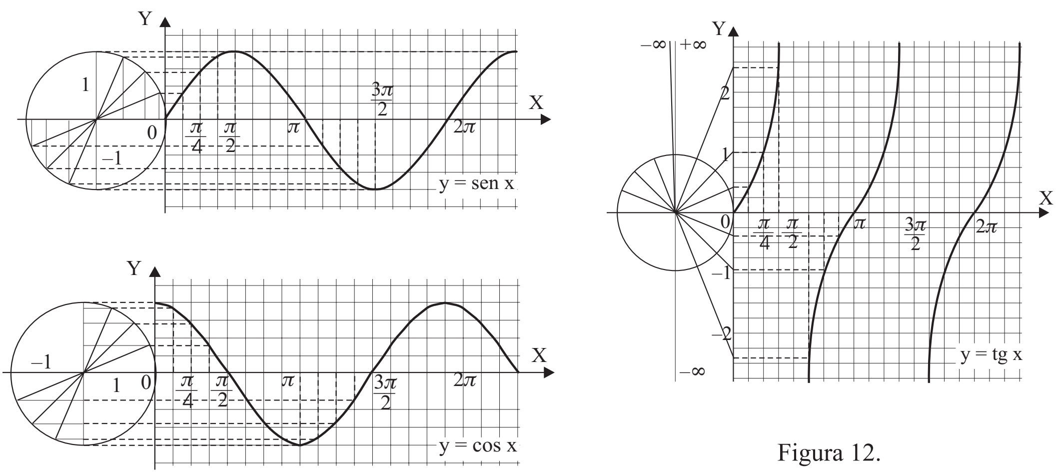


Figura 12.

2.7.1. Gráficas de las funciones seno *y* coseno

De $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ se desprenden $|\cos x| \le 1$, $|\operatorname{sen} x| \le 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Es decir, son **funciones acotadas** sobre R, siendo $-1 \le \cos x \le 1$, $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

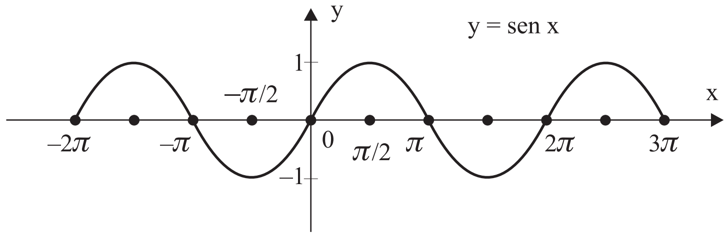
Puesto que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$ y $\operatorname{sen} = \dfrac{3\pi}{2} = \cos \pi = -1$, se tendrá que -1 y $+1$ son los **valores máximo y mínimo** absolutos de tales funciones y por tanto, el **recorrido** de ambas funciones es el intervalo $[-1,+1]$.

El **período** de ambas funciones es 2π, como ya vimos. Además, *son continuas y derivables* en todo R, siendo $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

De ahí que los *puntos singulares* de ambas funciones (donde presentan los máximos y mínimos locales) se obtienen de las relaciones $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2} = 0$ y sen $k\pi = 0$, para todo $k \in Z$. Tendríamos que los puntos críticos o estacionarios de la función **seno** se obtienen para $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, mientras que la función **coseno** los presenta para $x = k\pi$.

Las gráficas extendidas a todo $\mathbb{R}$ son las siguientes:

Figura 13.



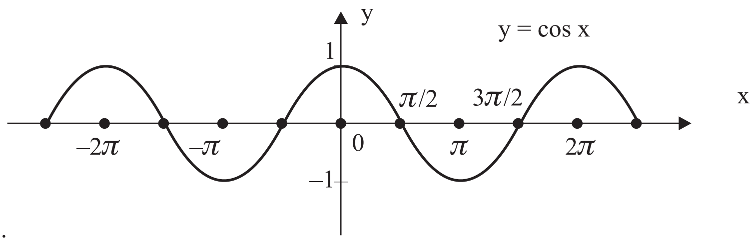


Figura 14.

2.7.2. Gráficas de las funciones tangente *y* cotangente

El **período** de las funciones es ahora π, presentando discontinuidades de *salto infinito* en los puntos en que anulan cos x y sen x. Así pues, la función y = tg x es **discontinua** en $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$ $(\forall\, k \in Z)$, mientras que la función y = cotg x lo es en $x = k\pi$ $(\forall\, k \in Z)$. Las gráficas tienen **asíntotas verticales** en tales puntos.

Podemos tomar para y = tg x el período comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, y para la función y = cotg x el comprendido entre 0 y π. Las gráficas completas se obtienen por repetición a intervalos regulares a izquierda y derecha del de partida.

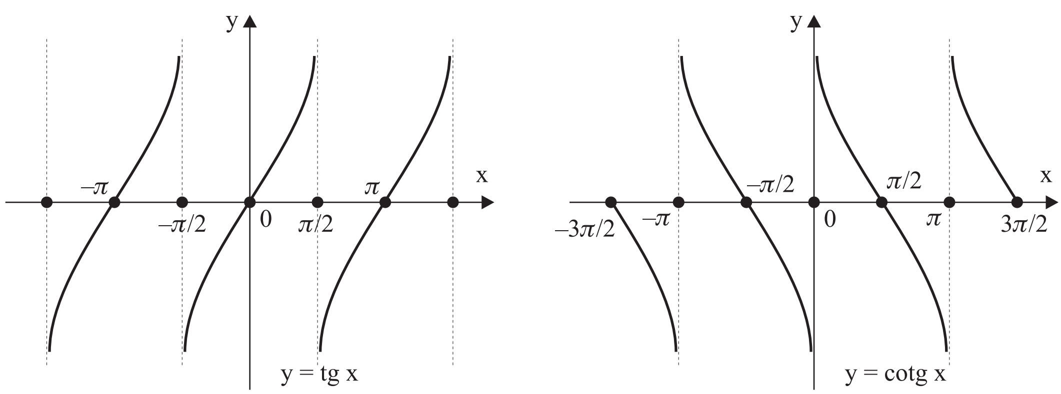


Figura 15.

2.7.3. Gráficas de las funciones secante *y* cosecante

A partir de las propiedades de *coseno* y *seno* son inmediatas las siguientes consideraciones acerca de las funciones y = sec x e y = cosec x

- El recorrido de ambas es $]-\infty, -1] \cup [+1,\infty[$
- El período de ambas es 2π
- La función y = sec x presenta discontinuidades (asíntotas verticales) en los puntos donde se anula cos x, o sea, en $x = \dfrac{(2k-1)\pi}{2}$ $(\forall\, k \in Z)$
- La función y = cosec x presenta discontinuidades (asíntotas verticales) en los puntos donde se anula sen x, o sea, en $x = k\pi$ $(\forall k \in Z)$

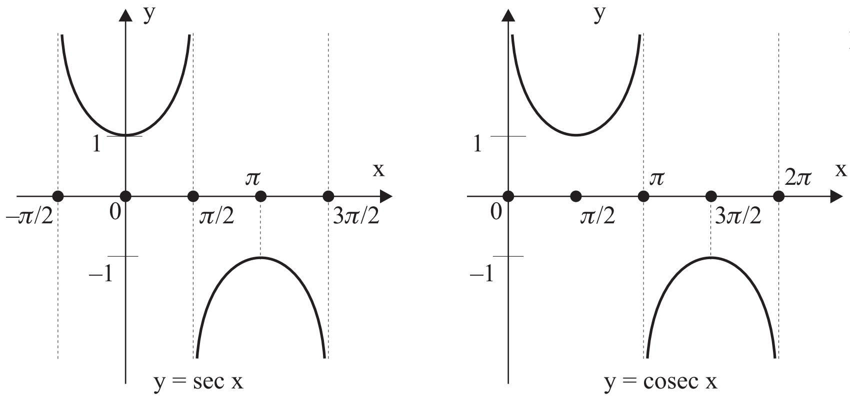


Figura 16.

3. FUNCIONES INVERSAS DE LAS CIRCULARES: FUNCIONES CICLOMÉTRICAS

La función sen: $\mathbb{R} \to [-1,+1]$ no es *uno a uno*, pues sen x = sen (x + 2kπ). Ni siquiera si nos ceñimos a la primera vuelta, o sea, para $x \in [0,2\pi]$, ya que para un mismo valor del intervalo $[-1,+1]$, salvo para -1 y $+1$, hay dos números de $[0,2\pi]$ cuyo seno tiene dicho valor.

Sin embargo, si *restringimos* el dominio de la función *seno* a un intervalo conveniente podemos construir una función *uno a uno* f que tendrá una recíproca f^{-1}. Existen muchas maneras de hacerlo. Algunos dominios posibles son: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]$, etc., y en realidad cualquiera de ellos se puede elegir indistintamente. Se acostumbra, sin embargo, a elegir el intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Podemos hacer uso de un enunciado general, que es consecuencia inmediata del teorema de Darboux o de valores intermedios para una función continua en un intervalo cerrado y acotado.

PROPOSICIÓN:

Si f: [a,b] → R es estrictamente creciente/decreciente y continua, entonces define una biyección de [a,b] en [f(a),f(b)] y su recíproca f^{-1} *es también continua y estrictamente creciente/decreciente.*

Los intervalos elegidos para la restricción a una función *uno a uno* son el $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ para el caso de las funciones seno y tangente, y el $[0,\pi]$ para el caso de coseno y cotangente.

Obtenemos así las restricciones biyectivas:

sen: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,+1]$ *tg*: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to\,]-\infty,+\infty[$

cos: $[0,\pi] \to [-1,+1]$ *cotg*: $[0,\pi] \to\,]-\infty,+\infty[$

cuyas gráficas son:

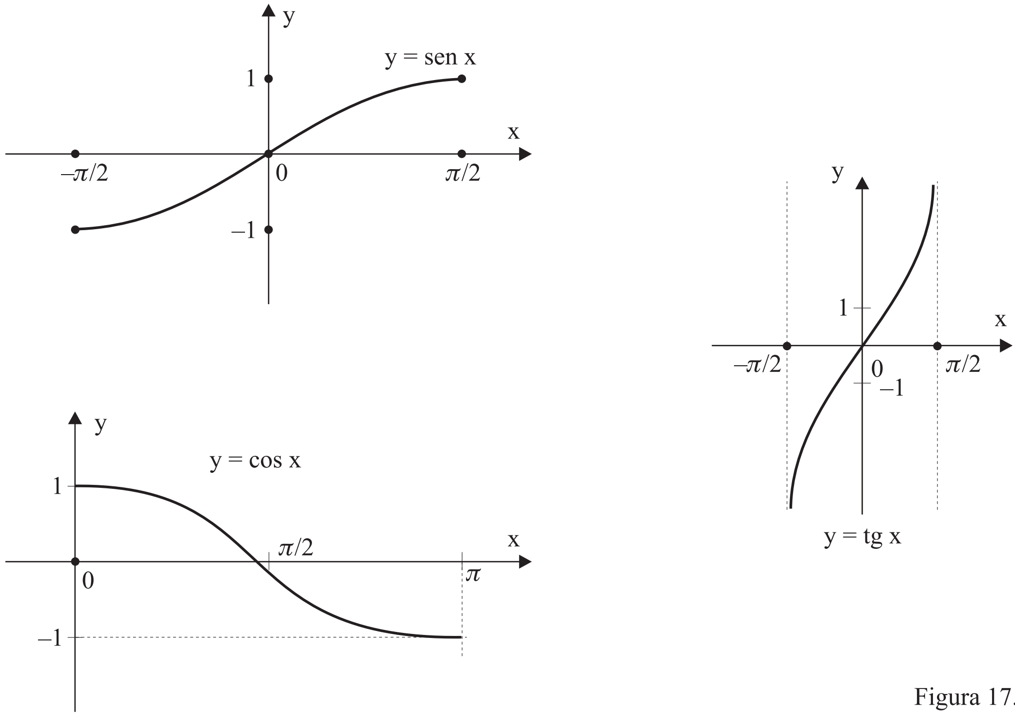


Figura 17.

Haciendo uso de la proposición anterior podemos definir las funciones recíprocas de las anteriores: sen^{-1}, $\cos^{-1}$, tg^{-1} y cotg^{-1}. Usualmente se denominan respectivamente *arco seno*, *arco coseno*, *arco tangente* y *arco cotangente*:

arcsen: $[-1,+1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *arctg:* $]-\infty,+\infty[\to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

arccos: $[-1,+1] \to [0,\pi]$ *arccotg*: $]-\infty,+\infty[\to [0,\pi]$

Las gráficas correspondientes se obtienen de las anteriores tomando las simétricas respecto a la recta y = x, con lo que resultan las siguientes:

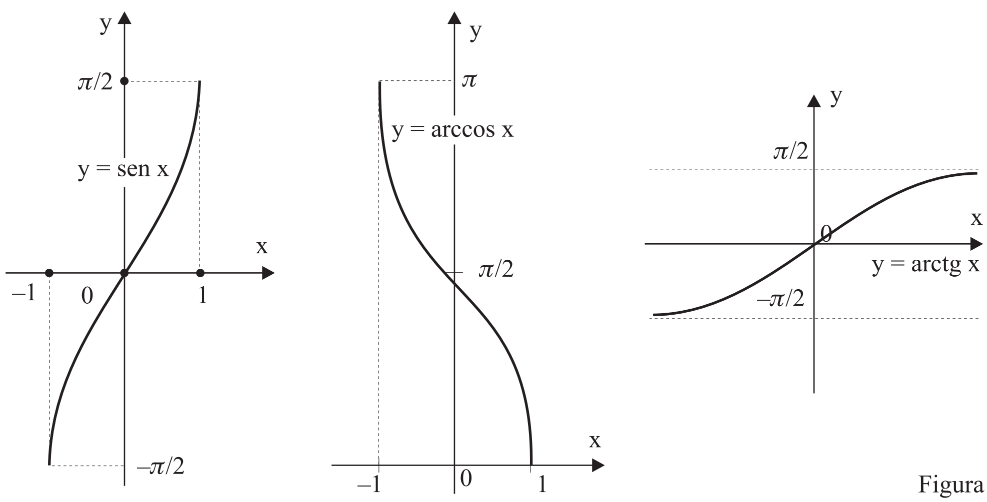


Figura 18.